# 生日蜡烛

## 【题意简述】

有 n 根蜡烛和 n 个开关，每根蜡烛至多由两个开关控制。第 i 根蜡烛由第 i 个开关控制，此外，还可能由另一个开关 j 控制，并且满足当 i>1 时 j<i，当 i=1 时 j 为任意数。
有 m 个操作，动态修改某根蜡烛的状态和控制它的开关，求每次操作后把所有蜡烛都熄灭最少要按几次开关，无解输出-1。

## 【数据范围】

10%的数据满足：n、m≤10
20%的数据满足：n、m≤1000
另有 20%的数据满足：控制蜡烛的开关不会更改，且控制蜡烛 i 的开关为 i 和(i+n-2)%n+1
另有 30%的数据满足：控制蜡烛的开关不会更改
100%的数据满足：n、m≤100000

## 【算法分析】

**算法 1：**

每个开关按奇数次和按一次效果一样，按偶数次和不按效果一样。
因此可以先 $2^n$ 枚举每个开关按或不按，再检查所有蜡烛最终是否熄灭。

**时间复杂度**: $O(mn2^n)$

**空间复杂度**:$O(n)$

**期望得分：**10 分

**算法 2：**

先枚举第一个开关按或不按，第 i(i>1)个开关便可以由之前的开关和第 i 根蜡烛的状态推导出来。最后再检查第 1 根蜡烛即可。

**时间复杂度**:$O(mn)$

**空间复杂度**:$O(n)$

**期望得分：**20 分

**算法 3：**

将问题抽象一下，把开关看做点，蜡烛看做连接两点的边。
若蜡烛是亮的，则控制它的两个开关中应按一个，否则两个开关应同时按或同时不按。

为了方便处理，我们可以增设 0 号开关，并规定它不能按，这样当蜡烛只由一个开关控制时便不需特殊考虑。

由于第 i 根蜡烛一定由第 i 个开关控制，若是把控制 i 号蜡烛的另一个开关看做 i 的前驱，那么每个点有且仅有一个前驱，得到的图是环套树森林。

类似**算法 2**，我们先不考虑第 1 根蜡烛，直接将 1 号点连到 0 号点，计算答案前再枚举 1 号开关按或不按，环套树森林就简化成了树。

20%的数据中，树的初始形态为链，且结构不发生改变，那么，当蜡烛 i 状态改变时，第 i 个开关到第 n 个开关的状态全部需要改变。

这是可以用线段树来维护的，修改操作即将一段区间取反。

询问最少要按多少次开关，别忘了先枚举 1 号开关，再查询控制 1 号蜡烛的开关的状态，检查 1 号蜡烛最终是否熄灭。若是最终熄灭，序列中 1(我们用 1 或 0 代表按或不按)的个数就是要按开关的次数，否则当前解不合法。

**时间复杂度**:*O((n+m)logn)*

**空间复杂度**:*O(n)*

**期望得分：20 分**

结合**算法 2**，可以得到 40 分

**算法 4：**

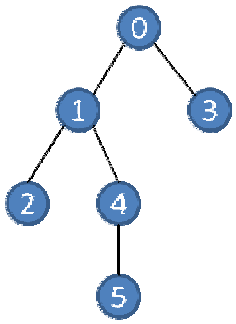
50%的数据中，树的形态不发生改变，那么，当蜡烛 i 状态改变时，以 i 为根的子树中开关的状态全部需要改变。

子树改变使我们联想到了 dfs 括号序列。

我们对一棵树进行深度优先遍历。

如右图，其 dfs 括号序列为：

0 1 2 2 4 5 5 4 1 3 3 0




可以发现，以 i 为根的子树即两个 i 之间的连续一段。

利用 dfs 括号序列，我们可以设计如下算法：求出树的 dfs 括号序列，将开关 i 的信息(0 或 1)存入前一个 i，将后一个 i 看做 2。蜡烛 i 状态改变时，我们需要将子树 i 对应的 dfs 括号序列中的 0 变为 1,1 变为 0。

这同样可以用线段树来维护。

**时间复杂度**: *O((n+m)logn)*

**空间复杂度**:*O(n)*

**期望得分：50 分**

结合**算法 2**，可以得到 70 分

**算法 5：**

树的形态改变，对应着 dfs 括号序列的变化。更改某个节点的父亲，即将一段 dfs 序列移至另一处。

这是可以用平衡树来维护的。

修改 i 号蜡烛，就是将开关 i 对应的区间插入至新位置，并根据蜡烛 i 与控制它的开关的状态判断子树是否需要取反。

**时间复杂度**: *O((n+m)logn)*

**空间复杂度**:*O(n)*

**期望得分：**100 分