

MET 解题报告

山东省胜利第一中学 王子昱

2013 年 3 月 24 日

Contents

1 题目大意	2
2 算法分析	2
3 参考文献	3

1 题目大意

给定一个 N 个结点的树，选出 L 条路径，使其覆盖的结点数最大。

2 算法分析

我们讨论最优解具有的性质。

定理2.1. 最优方案中被覆盖的结点必然是联通的。

Proof. 假设在某个最优解中，存在被覆盖的两点 u, v 使得路径 $u \rightsquigarrow v$ 中没有未被覆盖的点。设点 u 的度数为 a ，点 v 的度数为 b 。

若 a, b 有一个奇数，不失一般性，假设 a 为奇数，则方案中存在一条路径的端点为 u 。我们将其端点延伸到 v ，就可以得到一个 L 条路径的方案，且其权值比当前方案更优。这与当前方案是最优解矛盾。

若 a, b 均为偶数，任取过 u, v 的两条路径 $s_1 \rightsquigarrow t_1, s_2 \rightsquigarrow t_2$ ，用 $s_1 \rightsquigarrow t_2, s_2 \rightsquigarrow t_1$ 代替之，可以使路径 $u \rightsquigarrow v$ 被覆盖，得到一个权值比当前方案更优的方案。得到矛盾。

因此，不存在不联通的最优方案。

□

由定理2.1立即可得，最优方案是一棵至多有 $2K$ 个叶子的树。

定理2.2. 最优方案中，必然存在一个点使其为树中的一条最长路的端点。

Proof. 设 S 为包含树中所有路径的集合， P 为包含所有不超过 K 条不相交路径集合的集合。容易验证， (S, P) 是一个拟阵，原问题为拟阵的最大独立集问题。由拟阵最大独立集的求解算法可得，最优解中一定包含一条最长路，因此，存在一个点使其为树中的一条最长路的端点。 □

设树中任意一个最长路的端点为 r ，于是，问题可以转化为寻找包含 r 的一个端点的、有至多 $2K$ 个叶子的子树。将树根定为 r ，设 S' 为树中所有满足以下条件的路径：一个端点的祖先为另一端点。于是问题转化为在 S' 中寻找至多 $2K - 1$ 条不相交路径¹。

设 P' 为包含所有不超过 $2K - 1$ 条 S' 中的不相交路径集合的集合，容易验证 (S', P') 也是一个拟阵，因此，我们直接套用拟阵的最大独立集算法。

¹由于最长路端点的度数必然为1，它构成了最优解中 $2K$ 个叶子中的一个

于是，最终算法流程如下：寻找一条最长的向下路径，把其中的结点删去；重复这一过程 $2K - 1$ 次。

很容易得到 $O(N)$ 的实现，实现的细节这里略去。

3 参考文献

1. 条目“Greedy”, Wikipedia